L2 & PrèIng2 & Archi 2 2025/2026
Génie civil - - Semestre 1

Exercices de Mathématiques 1

Algèbre linéaire et euclidienne

28 août 2025

Table des matières

Semaine 1 : Barycentre . . . 2
Semaine 2 : Espace euclidien . . . 4
Semaine 3 : Projeté orthogonal . . . 5
Semaine 4 : Algèbre linéaire élémentaire . . . 6
Semaine 5 : Applications linéaires et affines . . . 8
Semaine 6 : Vecteurs propres ; valeurs propres . . . 9
Semaine 7 : Déterminant . . . 10
Semaine 8 : Diagonalisation . . . 11
Semaine 9 : Matrices orthogonales et isométries . . . 12
Semaine 10 : Réduction des matrices symétriques . . . 14
Solution des exercices corrigés . . . 17

Semaine 1 : Barycentre

Exercice 1: (A chercher seul, non corrigé en TD, réponse à la fin)
Représenter un triangle A, B, C du plan ainsi que les barycentres suivants :

$G_1 = \text{Bar}\big((A,1);(B,1)\big)$
$G_2 = \text{Bar}\big((A,2);(B,2)\big)$

$G_3 = \text{Bar}\big((A,2);(B,-1)\big)$
$G_4 = \text{Bar}\big((A,1);(B,1);(C,0)\big)$

$G_5 = \text{Bar}\big((A,1);(B,1);(C,1)\big)$
$G_6 = \text{Bar}\big((A,2);(B,1);(C,1)\big)$

Exercice 2 : Soient A et B deux points distincts. Dans chacun des cas suivants, déterminer deux réels α et β tel que G soit le barycentre du système $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$.
a) $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GB}$ b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GB} = 3\overrightarrow{GA}$ c) $3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{0}$

Exercice 3 : Soit ABC un triangle. Soient B_1 et C_1 des points des segments $[AC]$ et $[AB]$. Ils s'écrivent comme des barycentres $B_1 = \text{Bar}\big((A,1),(B,\beta)\big)$ et $C_1 = \text{Bar}\big((A,1),(C,\gamma)\big)$. On note G l'intersection des droites (BB_1) et (CC_1), et A_1 l'intersection des droites (AG) et (BC).

a) Écrire les points de la droite (BB_1) comme des barycentres.
b) Écrire les points de la droite (CC_1) comme des barycentres.
c) Écrire A_1 comme barycentre de B et C.
d) Étudier le cas particulier où B_1 et C_1 sont les milieux des segments $[AC]$ et $[AB]$, puis plus généralement le cas où $\beta = \gamma$.

Exercice 4 : Dans un tétraèdre $ABCD$, on désigne par I, J, K, L, M et N les milieux des arêtes $[AB], [BC], [CD], [DA]$, $[AC]$ et $[BD]$ et par G_1, G_2, G_3 et G_4 les centres de gravité des triangles BCD, CDA, ABD et ABC.
Démontrer que les sept droites $(AG_1), (BG_2), (CG_3), (DG_4), (IK), (JL)$ et (MN) sont concourantes.

Exercice 5 : Soit ABC un triangle. Soit C_1 le point sur le segment $[AB]$ tel que $BC_1 = 2AC_1$.
Soit B_1 le point sur le segment $[AC]$ et que $AB_1 = 2CB_1$. Soit A_1 le point sur la droite (BC) tel que : $A_1 \notin [BC]$ et $BC = 3CA_1$

a) Écrire les points de la droite (B_1C_1) comme des barycentres de A, B, C.
b) Démontrer que les points A_1, B_1 et C_1 sont alignés.

Exercice 6 : Soit A, B, C trois points du plan.
Déterminer les points M du plan tels que $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$

Exercice 7 : Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(B_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des points de l'espace, G_A l'isobarycentre de $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et G_B l'isobarycentre de $(B_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iB_i} = n\overrightarrow{G_AG_B}$.

Exercice 8 : Soit A, B, C trois points du plan. a, b, c, a', b', c', k des réels tels que
$\begin{cases} a+b+c \neq 0 \\ a'+b'+c' \neq 0 \\ a+b+c+k(a'+b'+c') \neq 0 \end{cases}$ et soit $\begin{cases} G = \text{Bar}\big((A,a),(B,b),(C,c)\big) \\ G' = \text{Bar}\big((A,a'),(B,b'),(C,c')\big) \\ G_k = \text{Bar}\big((A,a+ka'),(B,b+kb'),(C,c+kc')\big) \end{cases}$

Montrer que les points G, G', et G_k sont alignés.

Exercice 9 : Soit A, B, C trois points du plan. s, t des réels tels que $s + t \neq 0$ et
$G_A = \text{Bar}\big((B,s),(C,t)\big)$, $G_B = \text{Bar}\big((A,t),(C,s)\big)$, et $G_C = \text{Bar}\big((A,s),(B,t)\big)$
Montrer que les triangles A, B, C et $G_AG_BG_C$ ont même isobarycentre.
Cas particulier $s = t$.

Exercice 10 : Soit A, B, C, D un rectangle du plan. Déterminer l'ensemble des points M qui vérifient :

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$$

Exercice 11 : Soient A, B et C trois points distincts, m un réel et G le barycentre de $(A,1), (B,1)$ et (C,m^2). Montrer que G existe pour tout réel m et qu'il décrit un segment que l'on précisera.

Exercice 12 : Soient A et B deux points distincts tels que $AB = 6$, m un réel et G le barycentre de $(A, 3-m)$ et $(B, 2m-1)$.

a) Quel est l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles G existe ?

b) i) Pour quelles valeurs de m le point G est-il le milieu du segment $[AB]$?

ii) Pour quelles valeurs de m le point G appartient-il au segment $[AB]$?

iii) G peut-il être le symétrique de A par rapport à B ?

c) Déterminer l'ensemble décrit par G lorsque m décrit l'intervalle $]-2;\frac{1}{2}]$.

Exercice 13 : Soient A et B deux points distincts du plan. On note f l'application qui, à tout point M du plan associe le point M' barycentre de $(A,1),(B,3)$ et $(M,-2)$. Montrer que f admet un unique point invariant G, en déduire que f est la symétrie de centre G.

Exercice 14 : Centre d'inertie et barycentre : On admet les propriétés suivantes relatives au centre d'inertie d'une plaque homogène d'épaisseur négligeable :

a) Si la plaque admet un centre de symétrie, c'est aussi son centre d'inertie.

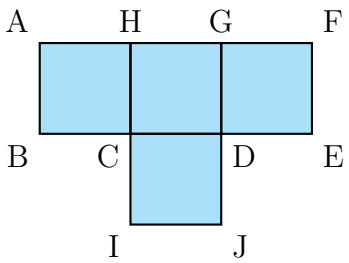
b) Si la plaque admet un axe de symétrie, alors son centre d'inertie appartient à cet axe.

c) Une plaque triangulaire admet pour centre d'inertie son centre de gravité.

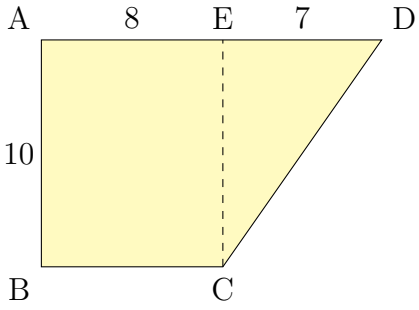
d) Si une plaque est constituée de deux parties de centres d'inertie respectifs O_1 et O_2 et de masses m_1 et m_2, alors son centre d'inertie est le barycentre des points pondérés (O_1,m_1) et (O_2,m_2).

Déterminer les centres de symétrie des plaques suivantes :

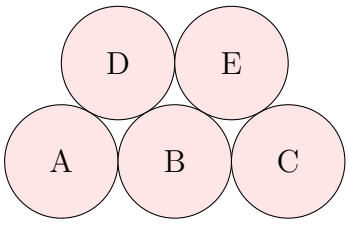
a) Quatre plaques carrées superposables



b) Un rectangle ABCE

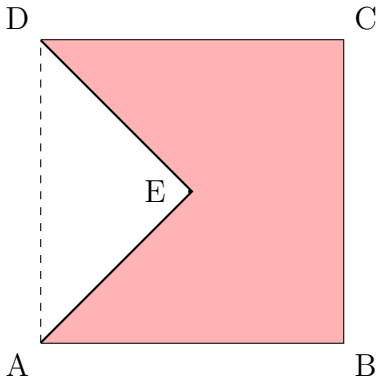


c) Cinq disques identiques tangents

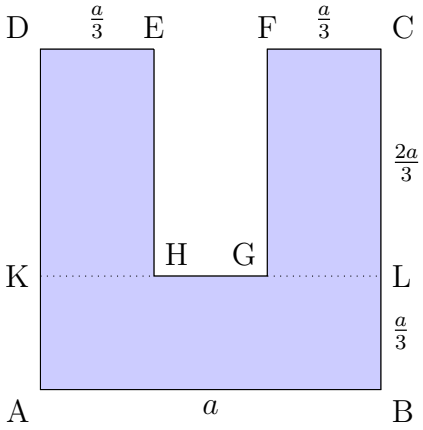


d) Un carré évidé d'un triangle rectangle

Soit un carré $ABCD$ de centre E. On retire le triangle AED pour obtenir une plaque pentagonale.



e) Un carré évidé d'un rectangle 1/2×2/3



Semaine 2 : Espace euclidien

Exercice 15: (A chercher seul, non corrigé en TD, réponse à la fin)
Les bases suivantes $(\overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{v_i})$ de $\mathbb{R}^2$ ou $(\overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{w_i})$ de $\mathbb{R}^3$ définies ci-après sont-elles orthogonales ? orthonormées ?

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad | \quad \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad | \quad \overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{u_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{v_4} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{w_4} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad | \quad \overrightarrow{u_5} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{v_5} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{w_5} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 16 :
Soit $B = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$ telle que $\|\overrightarrow{v}_1\| = 2, \|\overrightarrow{v}_2\| = 3, \langle \overrightarrow{v}_1 \mid \overrightarrow{v}_2 \rangle = 5$
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ qui ont les matrice coordonnées suivantes dans la base B :

$$X_B(\overrightarrow{u}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad X_B(\overrightarrow{w}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

a) Calculer $\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w} \rangle$.
b) Est-il possible d'avoir 2 vecteurs tels que $\|\overrightarrow{w}_1\| = 2, \quad \|\overrightarrow{w}_2\| = 3, \quad \langle \overrightarrow{w}_1 \mid \overrightarrow{w}_2 \rangle = 10$

Exercice 17 :
On considère les vecteurs $\overrightarrow{v}_1 = \frac{1}{7}(3, -6, 2), \quad \overrightarrow{v}_2 = \frac{1}{7}(-6, -2, 3), \quad \overrightarrow{v}_3 = \frac{1}{7}(-2, -3, -6)$ de $\mathbb{R}^3$.
a) Vérifier que $B = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
b) Déterminer la matrice coordonnées de $\overrightarrow{v} = (1, 1, 1)$ dans cette base.

Exercice 18 :
On considère les vecteurs $\overrightarrow{v}_1 = (3, -6, 2), \quad \overrightarrow{v}_2 = (-6, -2, 3), \quad \overrightarrow{v}_3 = (-2, -3, -6)$ de $\mathbb{R}^3$.
a) Vérifier que $B = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.
b) Déterminer la matrice coordonnées de $\overrightarrow{v} = (1, 2, 3)$ dans cette base.

Exercice 19 :
Soit E un espace euclidien et x, y deux éléments de E.
Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, \|x + \lambda y\| \geq \|x\|$.

Exercice 20 :
Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n, n$ réels.
a) Démontrer que : $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \leqslant n\,(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)$
b) On suppose que pour tout entier $k \in [\![1; n]\!], x_k > 0$ et que $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$.
Démontrer que : $n^2 \leqslant \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}$

Exercice 21 : Soit A, B, C, D quatre points distincts du plan et a et b deux réels strictement positifs distincts.
a) Montrer que l'ensemble des points M qui vérifie $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{DM} = 0$ est le cercle de diamètre $[CD]$.
b) Montrer que l'ensemble des points M vérifiant $aAM = bBM$ est un cercle. On pourra factoriser $(aAM)^2 - (bBM)^2$ puis considérer deux barycentres bien choisis.

Exercice 22 : Soit E l'espace vectoriel des matrices 2×2, $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.
a) Quelle est la dimension de E ?
b) Pour $M, N \in E$ on pose $\langle M, N \rangle = \text{tr}\,(M^t N)$. Calculer $\langle A, B \rangle$.
c) Montrer que $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire sur E.
d) Quelle est la norme associée ? Calculer $\|A\|$.
e) Déterminer $I^{\perp}$.

Semaine 3 : Projeté orthogonal

Exercice 23 : On considère les vecteurs $\overrightarrow{v}_1 = (1,1,1)$, $\overrightarrow{v}_2 = (0,1,1)$, $\overrightarrow{v}_3 = (0,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Vérifier que $B = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Utiliser le procédé de Gram-Schmidt pour transformer B en une base orthonormée.

c) Mêmes questions avec les vecteurs : $\overrightarrow{v}_1 = (1,0,1)$, $\overrightarrow{v}_2 = (1,0,2)$, $\overrightarrow{v}_3 = (1,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 24: (A chercher seul, non corrigé en TD, réponse à la fin)
Mêmes questions avec les vecteurs : $\overrightarrow{v}_1 = (1,0,1)$, $\overrightarrow{v}_2 = (0,1,1)$, $\overrightarrow{v}_3 = (1,5,3)$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 25 : Appliquer la méthode d'orthonormalisation de Schmidt pour orthonormaliser les bases définies par :

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 26 : Dans chacun des cas suivants, déterminer une base orthonormée de F puis déterminer le projeté orthogonal de $\overrightarrow{v}$ sur F, ainsi que la distance entre $\overrightarrow{v}$ et F. Déterminer enfin une base de $F^\perp$.

a) $F = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0\}$, $\overrightarrow{v} = (1,2,3)$

b) $F = \text{Vect}(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2) \subset \mathbb{R}^3$, où $\overrightarrow{v}_1 = (1,1,1)$, $\overrightarrow{v}_2 = (2,3,4)$, $\overrightarrow{v}_3 = (1,2,5)$

c) $F = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 0 \text{ et } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$, $\overrightarrow{v} = (1,2,3,4)$

d) $F = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ et } x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$, $\overrightarrow{v} = (1,2,3,4,5)$

Exercice 27 : Déterminer une base orthonormale du plan vectoriel d'équation $2x - y + 3z = 0$.

Exercice 28 : Déterminer une base orthonormale du plan vectoriel P d'équation $x - y - z = 0$. Déterminer le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ sur le plan vectoriel P. En déduire la distance de $\overrightarrow{u}$ à P.

Exercice 29 : Soit $E = \mathbb{R}^3$

a) Déterminer l'orthogonal du plan vectoriel $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$

b) Déterminer la matrice qui représente dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ la projection orthogonale sur le plan $x + 2y - 3z = 0$

c) Calculer $p_F(\overrightarrow{v})$ pour $\overrightarrow{v} = (1,2,3)$.

d) En déduire la distance entre $\overrightarrow{v}$ et F.

Exercice 30 : Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On pose $\forall P, Q \in E$, $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$

a) Calculer $\langle X, 1 + X^2\rangle$.

b) Montrer que $\langle .,. \rangle$ défini un produit scalaire sur E.

c) Appliquer la méthode d'orthonormalisation de Schmidt pour orthonormaliser la base canonique de E : $(1, X, X^2)$.

Exercice 31 : Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0; 2\pi]$, on pose $\forall f, g \in E$, $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$

a) Soient les fonctions f et g définies par $f(x) = x$ et $g(x) = \cos\frac{x}{4}$, calculer $\langle f, g\rangle$.

b) Montrer que $\langle .,. \rangle$ défini un produit scalaire sur E. Interpréter géométriquement la norme associée.

c) Déterminer pour ce produit scalaire le projeté orthogonal de la fonction g sur le sous espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 1. Interprétation.

d) Déterminer pour ce produit scalaire le projeté orthogonal de la fonction f sur le sous espace vectoriel $H = \{a_0 + a_1 \cos + b_1 \sin, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 32 (suite de l'exercice 22) : Soit E l'espace vectoriel des matrices 2×2 muni du produit scalaire : $\langle M, N\rangle = \text{tr}\,(M^t N)$. On note $\mathscr{S}$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques.

a) Déterminer $\mathscr{S}^\perp$.

b) Déterminer le projeté orthogonal d'une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sur $\mathscr{S}$.

Exercice 33 : Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on pose

$$\forall f, g \in E,\ \langle f, g\rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

On admet que $\langle ., .\rangle$ définit un produit scalaire sur E.

a) Soient les fonctions définies par $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$ et $g(x) = \sin(x)$, calculer $\langle f_0, g\rangle$ et $\langle f_1, g\rangle$.

b) Soit $H = \{h \in E \mid \exists m, p \in \mathbb{R}, \forall x \in [0; 1], h(x) = mx + p\}$ l'espace vectoriel des fonctions affines, déterminer une base de H, en déduire que H est de dimension 2.

c) Déterminer le projeté orthogonal G de la fonction g sur H.

d) De toutes les fonctions linéaires (de la forme $v(x) = \alpha x$), quelle est celle qui est "la plus proche" de g.

Semaine 4 : Algèbre linéaire élémentaire

Exercice 34: (A chercher seul, non corrigé en TD, réponse à la fin)
Lorsqu'elles sont possibles effectuer les opérations suivantes :

$$AE;\ AB;\ AC;\ CA;\ CF;\ FC;\ C^{-1};\ A^{-1};\ D^{-1};\ G^{-1}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix};\ D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix};\ F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ G = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 35: (A chercher seul, non corrigé en TD, réponse à la fin)
Calculer les matrices inverses des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 8 & 5 & 7 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix};\ D = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix};$$

Exercice 36 : Soient $\overrightarrow{u} = (1; 2; 3)$ et $\overrightarrow{v} = (2; 3; 4)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

a) Montrer que $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ est libre.

b) La famille $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

c) Notons H le sous espace vectoriel engendré par $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$. Quelle est sa dimension ?

$$H = \{\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

d) Déterminer une équation de H.

e) Soit $\overrightarrow{w} = (1; 1; 1)$, $\overrightarrow{w}$ appartient-il a H ?

f) Compléter $\overrightarrow{w}$ en une base de H.

g) Quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{w}$ dans la base $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$?

Exercice 37 : Soit $P=\begin{pmatrix}1&-2&3\\4&1&1\\1&2&-2\end{pmatrix}$, on peut montrer que $P^{-1}=\begin{pmatrix}4&-2&5\\-9&5&-11\\-7&4&-9\end{pmatrix}$

a) Résoudre les systèmes :

$$(S):\begin{cases}x-2y+3z=1\\4x+y+z=-1\\x+2y-2z=3\end{cases}\quad(S'):\begin{cases}x+4y+z=1\\-2x+y+2z=-1\\3x+y-2z=3\end{cases}$$

b) On suppose de plus que P est la matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$. Soit $\overrightarrow{u}$ le vecteur de matrice coordonnées $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$, quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans $\mathcal{B}'$?

c) Soit $\overrightarrow{v}$ le vecteur de matrice coordonnées $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}'$, quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ dans $\mathcal{B}$?

d) Soit Π le plan d'équation $2x'+3y'-z'=0$, dans la base $\mathcal{B}'$. Déterminer une équation $(ax+by+cz=0)$ du plan Π dans la base $\mathcal{B}$. Que peut-on dire des vecteurs de coordonnées $(2;3;-1)$ dans $\mathcal{B}'$ et $(a;b;c)$ dans $\mathcal{B}$?

Exercice 38 : Soit $\mathcal{B}=(\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k})$ et $\mathcal{B}'=(\overrightarrow{i'};\overrightarrow{j'};\overrightarrow{k'})$ deux bases telles que

$$\begin{cases}\overrightarrow{i'}=2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}\\\overrightarrow{j'}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}\\\overrightarrow{k'}=-\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}\end{cases}$$

et f l'application linéaire définie par $f(x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k})=(x-y)\overrightarrow{i}+(2y-z)\overrightarrow{j}-(x+y+z)\overrightarrow{k}$

a) Déterminer la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$.

b) Déterminer la matrice N de f dans la base $\mathcal{B}'$.

c) Quelles sont les relations qui lient les matrices M, et N.

Exercice 39 : $f(x,y,z)=x+2y-z$, $g(x,y,z)=(2x-y,y-2x)$.
Déterminer les noyaux et les images de f et g. Pour chacun de ces 4 SEV on déterminera une base.

Exercice 40 : Soit f définie par $f(x,y,z)=(2x-y+z,y+x)$.

a) Déterminer le noyau et l'image de f.

b) Déterminer une base du noyau de f puis une base de l'image de f.

c) Écrire la matrice M de f relativement aux bases canoniques : $(1;0;0),(0;1;0),(0;0;1)$ et $(1;0),(0;1)$.

Exercice 41 : Soit E l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $xy''-y+xy=0$.

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel.

b) Écrire E comme noyau d'un application linéaire.

Exercice 42 : Soit $M=\begin{pmatrix}5&1\\5&7\end{pmatrix}$, déterminer $\max\limits_{\|X\|=1}\|MX\|$.

Exercice 43 : Soit $\mathcal{B}=(\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k})$ une base orthonormée et $\mathcal{B}'=(\overrightarrow{i'};\overrightarrow{j'};\overrightarrow{k'})$, $\mathcal{B}''=(\overrightarrow{i''};\overrightarrow{j''};\overrightarrow{k''})$ telles que

$$\begin{cases}\overrightarrow{i'}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{j}\\\overrightarrow{j'}=\frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{i}-\frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{k}\\\overrightarrow{k'}=\frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{i}-\frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{j}+\frac{2}{\sqrt{6}}\overrightarrow{k}\end{cases}\qquad\qquad\begin{cases}\overrightarrow{i''}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}\\\overrightarrow{j''}=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}\\\overrightarrow{k''}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}\end{cases}$$

a) Les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont-elle orthonormée ?

b) La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, déterminer P'' la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}''$.

c) Soit $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$ déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans les bases $\mathcal{B}'$ puis $\mathcal{B}''$.

d) Soit P le plan d'équation $2x + 3y + 5z = 0$ dans la base $\mathcal{B}$. En donner une équation dans la base $\mathcal{B}'$ puis dans la base puis $\mathcal{B}''$.

e) Lien entre l'équation du plan et le vecteur $\overrightarrow{u}$.

Exercice 44 : Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. On considère l'endomorphisme Φ qui a un polynôme P associe le polynôme $P' + P$. Déterminer la matrice de Φ dans la base $(1; X; X^2; X^3)$. déterminer le noyau et l'image de Φ.

Semaine 5 : Applications linéaires et affines

Exercice 45 : Soit f une application affine d'un espace vectoriel E dans lui même, $A, B \in E$ tel que $A \neq B$, et $f(A) = A$ et $f(B) = B$, montrer que f laisse les points de la droite (AB) invariants, c'est à dire. : $\forall M \in (AB),\ f(M) = M$.

sol : $M = A + t\overrightarrow{AB}$, $f(M) = f(0) + \overrightarrow{f}(A + t\overrightarrow{AB}) = f(0) + \overrightarrow{f}(A) + t\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) = f(A) + t(\overrightarrow{f}(B) - \overrightarrow{f}(A)) = A + t\overrightarrow{AB}$.

Exercice 46 : Quelle est la forme d'une représentation paramétrique du plan passant par $A = (x_A, y_A, z_A)$, et dont une base est formé des deux vecteurs $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u, z_u)$ et $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v, z_v)$. Les représentations paramétriques suivantes définissent-elles le même plan ?

$$P_1 : \begin{cases} x = 2 + \lambda + 2\mu \\ y = 2 + 2\lambda + \mu \\ z = 1 - \lambda - \mu \end{cases} \qquad P_2 : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda - \mu \\ y = 3 + 3\lambda + \mu \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

sol : oui, on peut trouver une équation cartésienne ou montrer une inclusion ....

Exercice 47 : Déterminer une représentation paramétrique, de la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (1, 2, 3)$, et sécante avec les deux droites d'équation $\begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

sol : $x = 1 + t \quad y = 2t \quad z = 4 + 3t$

Exercice 48 : Soient D et D' les droites d'équation $2x - 3y = 0$ et $x - 7y = 0$ dans une base $\mathcal{B}$ du plan, soit $\mathcal{S}$ la symétrie d'axe D parallèlement à D'.

a) Déterminer une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice de $\mathcal{S}$ est très simple.

b) Déterminer la matrice de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{B}'$.

c) Déterminer la matrice de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{B}$?

Exercice 49 : Soit h l'homothétie de centre 0 et de rapport 5, et p la projection sur le plan d'équation $x+2y+3z = 0$ parallèlement au vecteur $(-1; 1; 0)$. Déterminer la matrice de $h \circ p$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 50 : Une matrice N est dite nilpotente s'il existe un entier k tel que $N^k = 0$.
Montrer qu'une matrice diagonalisable est nilpotente si et seulement si elle est nulle.
Indication : considérer d'abord le cas où la matrice est diagonale.

Exercice 51 : Déterminer de deux façons différentes l'expression de $\mathscr{S}$ la symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y - 2z = 0$.

a) En revenant à la définition de la symétrie par rapport à $\mathcal{P}$, parallèlement à $\mathcal{P}^\perp$.

b) En écrivant la matrice de $\mathscr{S}$ dans une base bien adaptée à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^\perp$, puis en effectuant un changement de base.

Exercice 52 : Soit $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$, $\mathscr{S}$ la symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P}$ d'équation $ax + by + cz = 0$. Déterminer la matrice de $\mathscr{S}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. sol : $M = \begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1-2c^2 \end{pmatrix}$

Exercice 53 : Soit $p : E \to E$ une application linéaire vérifiant $p^2 = p$.

a) Montrer que $\operatorname{im} p \cap \ker p = \{\overrightarrow{0}\}$.

b) Montrer que $\operatorname{im} p + \ker p = E$.

c) Montrer que p est la projection sur $\operatorname{im} p$ parallèlement à $\ker p$. ker p

Semaine 6 : Vecteurs propres ; valeurs propres

Exercice 54 : Soit les matrices $M = \begin{pmatrix} 12 & -15 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) montrer que V est un vecteur propre de M, déterminer la valeur propre λ_0 associée à V.

b) Déterminer tous les vecteurs propres associés à λ_0. Déterminer le sous espace propre associé à λ_0.

c) Montrer que 2 est une autre valeur propre de M.

d) Soit W un vecteur propre associé à la valeur propre 2, et f l'application linéaire de matrice M dans la base canonique. Quelle est la matrice de f dans la base (V, W). sol : $\lambda_0 = 3$

Exercice 55 : Soit les matrices $M = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 5 & 9 \\ 3 & -3 & 4 & 7 \\ 3 & -6 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, montrer que V est un vecteur propre de M, déterminer la valeur propre λ_0 associée, déterminer tous les vecteurs propres associés à λ_0. Déterminer le sous espace propre associé à λ_0. sol : $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 56 : Déterminer les réels a et b tels que la matrice $M = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ b & -1 & 1 \\ b & 1 & 1 \end{pmatrix}$ admette $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ comme vecteur propre.

Exercice 57 : Soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ trois vecteurs d'un espace vectoriel de dimension fini E, et f une application linéaire telle que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 ; $\overrightarrow{v}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 2 et $\overrightarrow{w}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 3.

a) Montrer que la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une famille libre.

b) On complète $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ en une base $\mathcal{B}$ de E, que peut-on dire de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 58 : Soit E l'espace de dimension infinie des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et Ψ l'application de E dans E définie par $\forall f \in E,\ \Psi(f) = f'$. Montrer que tous les réels sont valeur propre et pour chacun déterminer le sous espace propre associé.

Exercice 59 : Soit E l'espace de dimension infinie des polynômes à coefficients réels, et f l'application linéaire de E dans E définie par $\forall P \in E,\ f(P) = XP'$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

Exercice 60 : Soit E l'espace vectoriel des suites réelles indicée par $\mathbb{N}$. Soit Φ l'endomorphisme de E qui à une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Soit la suite définie par $u_n = n$. Quelle est son image par Φ ? Écrire les premiers termes.

b) Soit la suite définie par $u_n = 2^n$. Quelle est son image par Φ ? Écrire les premiers termes.

c) Déterminer les vecteurs propres de Φ ? Puis l'ensemble des valeurs propres de Φ.

Semaine 7 : Déterminant

Exercice 61 : Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & a^2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} ab & a^2 & a \\ b & 2 & 6 \\ b & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ac & bc \end{vmatrix} \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2a & 2a & abc \\ 2b & abc & 2b \\ abc & 2c & 2c \end{vmatrix}$$

Exercice 62 (Distance d'un point à une droite) :
Soit D la droite de $\mathbb{R}^2$ passant par le point $A = (a, b)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta)$, $M_0 = (x_0, y_0)$ et H le projeté orthogonal de M_0 sur D.

a) D est-elle un sous espace vectoriel ?

b) Montrer que $|\mathrm{Det}(\overrightarrow{AM_0}, \overrightarrow{u})| = |\mathrm{Det}(\overrightarrow{HM_0}, \overrightarrow{u})| = |\overrightarrow{HM}||\overrightarrow{u}|$.

c) En déduire que la distance de M_0 à D est égale à :

$$d = \frac{|\beta(x_0 - a) - \alpha(y_0 - b)|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

d) En déduire que la distance de M_0 à la droite d'équation $ux + vy + w = 0$ est :

$$d = \frac{|ux_0 + vy_0 + w|}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

Exercice 63 : Soit E un espace euclidien. On appelle matrice de Gram d'une famille $(\overrightarrow{v}_i)_{1 \leq i \leq n}$ de vecteurs de E, la matrice :

$$G(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n) = \begin{pmatrix} \langle \overrightarrow{v}_1 \mid \overrightarrow{v}_1 \rangle & \langle \overrightarrow{v}_1 \mid \overrightarrow{v}_2 \rangle & \ldots & \langle \overrightarrow{v}_1 \mid \overrightarrow{v}_n \rangle \\ \langle \overrightarrow{v}_2 \mid \overrightarrow{v}_1 \rangle & \langle \overrightarrow{v}_2 \mid \overrightarrow{v}_2 \rangle & \ldots & \langle \overrightarrow{v}_2 \mid \overrightarrow{v}_n \rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle \overrightarrow{v}_n \mid \overrightarrow{v}_1 \rangle & \langle \overrightarrow{v}_n \mid \overrightarrow{v}_2 \rangle & \ldots & \langle \overrightarrow{v}_n \mid \overrightarrow{v}_n \rangle \end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice, noté $g(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n)$, est appelé déterminant de Gram de la famille $(\overrightarrow{v}_i)_{1 \leqslant in}$.

a) On considère les vecteurs $\overrightarrow{v}_1 = \binom{0}{1}$, $\overrightarrow{v}_2 = \binom{1}{1}$ de $\mathbb{R}^2$.

i) Vérifier que $B = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

ii) Calculer la matrice de Gram de B.

iii) La base B est-elle orthonormée ?

b) Propriétés du déterminant de Gram

i) Montrer que $g\left(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n\right) = 0$

ii) Montrer que $\forall k \in \mathbb{R}, g(k\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n) = kg(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n)$

iii) Montrer que $\forall k \in \mathbb{R}, g(\overrightarrow{v}_1 + k\overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n) = g(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n)$

iv) Montrer que les $(\overrightarrow{v}_i)$ forment une famille libre si et seulement si $g(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n) \neq 0$.

c) Montrer que la famille $(\overrightarrow{v}_i)_{1 \leq i \leq n}$ est orthogonale si et seulement si $G(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n)$ est diagonale.

d) Montrer que la famille $(\overrightarrow{v}_i)_{1 \leq i \leq n}$ est orthonormée. si et seulement si $G(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n)$ est égale à la matrice identité.

e) Soit F un sous espace vectoriel de E dont $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_k)$ est une base et $\overrightarrow{v}$ un vecteur de E.

i) Montrer que $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_k) = g(\overrightarrow{v} - p_F(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_k)$.

ii) Déterminer la première colonne de la matrice $G(\overrightarrow{v} - p_F(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_k)$

iii) En déduire que $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_k) = \|\overrightarrow{v} - p_F(\overrightarrow{v})\| \; g(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_k)$.

iv) Montrer que la distance de $\overrightarrow{v}$ à F est égale à $\dfrac{g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_k)}{g(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_k)}$

v) Déterminer la distance entre le vecteur $(1;2;3)$ et le plan engendré par les vecteurs $(1,-1,2)$ et $(2;1;-2)$. sol :

Exercice 64 : Soit B une base de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice de Gram est $G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Soient u et w deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui ont les matrice coordonnées suivants dans la base B :

$$X_B(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X_B(w) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Calculer $\langle u \mid w \rangle, \|u\|, \|v\|$.

Semaine 8 : Diagonalisation

Exercice 65 : Montrer sans utiliser le polynôme caractéristique que la matrice $M = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 6 \\ -4 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ admet 1 comme valeur propre et déterminer le sous espace propre associé à 1 : E_1. Montrer que 2 n'est pas valeur propre. Le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est-il un vecteur propre de M ?

Exercice 66 : Soient A et B des matrices carrées de même dimension.

a) Montrer que si λ est une valeur propre de AB associé au vecteur propre U alors λ est une valeur propre de BA, on pourra considérer à part le cas ou $BU = 0$.

b) Montrer ce résultat en utilisant le polynôme caractéristique.

Exercice 67 : Diagonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -15 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3a+1 & -3a-3 \\ a+1 & -a-3 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 6 \\ -4 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 7 & 8 \\ -4 & -8 & -9 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -4 \\ -5a-11 & -3a-28 & -2a-14 \\ 10a+24 & 6a+62 & 4a+31 \end{pmatrix}$$

sol : $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6/5 & -1/5 \\ 2/5 & -2/5 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$;; $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$;; $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Exercice 68: (A chercher seul, non corrigé en TD, réponse à la fin)

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{pmatrix}$

Exercice 69 : Soit A, P, D trois matrices telles que $A = PDP^{-1}$, montrer que

$i)$ $\det(A) = \det(D)$ $\qquad$ $ii)$ $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(D)$ $\qquad$ $iii)$ $P_A = P_D$

Exercice 70 :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ -5 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Diagonaliser M.

b) Donner une interprétation géométrique de la transformation associée à la matrice M dans une base $\mathcal{B}$.

Exercice 71 : Soit E un espace vectoriel de dimension fini et p un projecteur, c'est à dire un endomorphisme de E ayant la propriété : $p \circ p = p$. Montrer que les seuls valeurs propres que peut avoir un projecteur sont 1 et 0. Montrer qu'un projecteur est toujours diagonalisable. Pour cela on pourra montrer que tout vecteur s'écrit comme somme d'un vecteur propre associé à 1 et d'un vecteur propre associé à 0.

Exercice 72 : Soit $s : E \to E$ une application linéaire vérifiant $s^2 = \mathrm{id}$. On admet qu'une telle application est diagonalisable.

a) Déterminer les valeurs propres possibles pour s.

b) Montrer que si s possède deux valeurs propres alors s est une symétrie dont on déterminera les éléments caractéristiques.

Exercice 73 : [**dur**] Soit A une matrice $n \times n$ qui ne contient que des 0 sauf sur la première et la dernière colonne ainsi que sur la première et la dernière ligne ou il y a des 1.

a) Si $n = 2$, A est-elle diagonalisable ?

b) Si $n \geq 3$, montrer que 0 est une valeur propre de A, et que le sous espace propre associé est de dimension supérieur à $n - 2$.

c) Montrer que les seules valeurs non nulles de λ pour lesquelles le système $AX = \lambda X$ a des solutions ($X \neq 0$) sont $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2n-3}$ et $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2n-3}$

d) En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 74 : Montrer que si λ est une valeur propre de M, alors λ est une valeur propre de M^{t}.

Semaine 9 : Matrices orthogonales et isométries

Exercice 75 :

a) Parmi les matrices suivantes, lesquelles représentent des isométries dans une bon ?

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

b) Soient $X = \binom{1}{0}$, $\quad Y = \binom{2}{3}$.

Calculer $\langle X \mid Y\rangle, \langle AX \mid AY\rangle, \langle BX \mid BY\rangle, \|X\|, \|AX\|, \|BX\|$. Conclure.

Exercice 76 :

a) Montrer que les valeurs propres réelles d'une matrice orthogonale appartiennent à $\{1; -1\}$.

b) Montrer que le déterminant d'une matrice orthogonale est égal à ± 1.

Exercice 77 : Soit M une matrice orthogonale 2×2.

a) On suppose que le déterminant de M est égal à -1.

i) Montrer que le polynôme caractéristique de M possède deux racines réelles différentes.

ii) Montrer que M est diagonalisable.

iii) Montrer que deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres différentes sont orthogonaux.

iv) Montrer qu'il existe T orthogonale tels que $M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} {}^tP$.

b) On suppose que le déterminant de M est égal à 1. Montrer qu'il existe θ tel que :

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

c) Donner une interprétation géométrique de ce qui précède.

Exercice 78 : Un invariant important la trace.
Soit M une matrice carrée on appelle trace de M la somme des éléments diagonaux de M. On la note $\mathrm{tr}(M)$.

a) Calculer la trace des matrice suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -12 & 11 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 9 & -4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Montrer que pour deux matrices carrées A et B on a $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Exercice 79 :

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrice 3×3 de la forme $M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & N \end{pmatrix}$ avec $N = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous espace vectoriel dont on déterminera la dimension.

b) Montrer que le produit de deux matrices de $\mathcal{E}$ appartient encore à $\mathcal{E}$.

c) Donner une CNS sur N et α pour qu'une matrice M de cette forme soit inversible et déterminer son inverse.

d) Calculer lorsqu'il est défini le produit :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & N' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & N \end{pmatrix}^{-1}$$

Exercice 80 : (suite des exercices 76, 77, 78 et 79pour les matrices 3×3)
Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E de dimension 3 et M la matrice de f dans une bon de E. On suppose que M est orthogonale.

a) Montrer que contrairement au cas de l'exercice 77 la matrice M a une valeur propre réelle, on pourra étudier le degré de son polynôme caractéristique. En déduire que soit 1 soit -1 est une valeur propre de M, notons ε une valeur propre de f et $\overrightarrow{u}$ un vecteur propre associé. On note $H = \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ et $F = H^{\perp} = \{\overrightarrow{v} \in E; < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >= 0\}$ l'orthogonal de H.

b) Si M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ quelles sont les diagonales possibles.

c) Si M n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$:

i) Montrer que si $\overrightarrow{v} \in H$ alors $f(\overrightarrow{v}) \in H$.

ii) Montrer que si $\overrightarrow{v} \in F$ alors $f(\overrightarrow{v}) \in F$. On pourra calculer la norme de $f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$.

iii) Soit $\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ une bon de F. Montrer que la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ appartient à $\mathcal{E}$ de l'exercice 79, montrer que la matrice N correspondante est orthogonale.

iv) Montrer que si N est diagonalisable alors M l'est aussi.

v) En déduire que dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

d) Classer les matrices orthogonales 3×3, interprétation géométrique.

e) Soit A la matrice d'une rotation, déterminer l'angle de cette rotation, expliquer comment l'on pourrait trouver l'axe de la rotation.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Exercice 81 : Soit f_θ une rotation de l'espace d'axe Δ.

a) D'après l'exercice 80, il existe une base orthonormale dans laquelle la matrice de f est $M(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, on suppose que θ est petit et on note M_a l'approximation affine de M, c'est à dire que M_a est la partie principale du DL_1 de $\theta \mapsto M(\theta)$ en 0.

i) Déterminer M_a.

ii) M_a est-elle orthogonale ?

iii) Montrer qu'il existe un vecteur V_a tel que pour toute matrice colonne U on ait : $M_a U = U + V_a \wedge U$.

b) On voudrait trouver un résultat équivalent pour une rotation d'axe de vecteur directeur $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ et d'angle très petit θ.

Semaine 10 : Réduction des matrices symétriques

Exercice 82 :

Soit $E = \mathbb{R}^4$. Soient $\overrightarrow{u}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\overrightarrow{u}_2 = (1, -1, 1, -1)$ et $F = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2)$

a) Déterminer une base orthonormée de F et l'étendre en une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$, cela peut s'obtenir sans calcul, grace à la forme très particulière de $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$.

b) Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F.

Exercice 83 : Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) M est-elle symétrique ?

b) Déterminer les sous espaces propres de M, sont-ils orthogonaux ?

c) Déterminer une base orthonormale de vecteurs propres.

d) Déterminer P orthogonale et D diagonale telles que $M = PDP^{\mathsf{t}}$.

Exercice 84 : Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

a) M est-elle symétrique ? Quel est son rang ?

b) Déterminer les sous espaces propres de M, sont-ils orthogonaux ?

c) Déterminer une base orthonormale de vecteurs propres.

d) Déterminer P orthogonale et D diagonale telles que $M = PDP^{\mathsf{t}}$.

Exercice 85 : Soit la matrice $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) M est-elle symétrique ?

b) M est-elle orthogonale ?

c) M est-elle diagonalisable ?

d) Déterminer une matrice P orthogonale, et une matrice D diagonale telle que $M = PDP^{-1}$.

e) Donner une interprétation géométrique à l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, dont la matrice est M dans la base canonique de R^3.

Exercice 86 : Soit S une matrice symétrique telle que $S^5 = I$, montrer que $S = I$.
Soit S une matrice symétrique telle que $S^4 = I$, montrer que $S^2 = I$, a-t-on toujours $S = I$?

Exercice 87 : Soit M une matrice et P une matrice orthogonale telles que PSP^{t} est diagonale, montrer que M est symétrique.

Exercice 88 : Montrer que pour une matrice symétrique S dont la plus grande valeur propre est λ_M et la plus petite est λ_m, on a pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\lambda_m \|X\| \leqslant \|SX\| \leqslant \lambda_M \|X\|$$

Exercice 89 : On pourra avec intérêt relire les énoncés des exercices 32 et 78
Soit A une matrice carré $n \times n$.

a) Montrer que la matrice $S = {}^tAA$ est diagonalisable. On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres.

b) Montrer que $\mathrm{tr}(S) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \sum_{1 \leq i,j \leq n} A_{i,j}^2$.

c) Soit X_1 un vecteur propre associé à λ_1, en calculant ${}^tX_1 S X_1$, montrer que $\lambda_1 \geq 0$.

d) En considérant une b.o.n. de vecteurs propres, montrer que pour toute matrice colonne X, $n \times 1$ on a :

$$\sqrt{\lambda_1}\|X\| \leq \|AX\| \leq \sqrt{\lambda_n}\|X\|$$

e) Montrer qu'il existe des matrices colonnes non nulle pour lesquelles on a égalité.

Exercice 90 : Soit Γ la conique d'équation

$$5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 7y^2 = 1$$

dans la base canonique. Déterminer une base orthonormée dans laquelle l'équation de Γ est réduite.

Exercice 91 : Même question avec la conique d'équation $x^2 + 2xy - y^2 + x - 2y = 1$.

Exercice 92 : Soit S une matrice symétrique.

a) En supposant que toutes les valeurs propres de S sont positives, et en diagonalisant S montrer qu'il existe une matrice symétrique T telle que $T^2 = S$.

b) Appliquer ce qui précède à la matrice $S_1 = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$.

Exercice 93 :

a) Soit S une matrice symétrique à deux lignes, pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, calculer ${}^tXSX$.

b) Soit S une matrice symétrique à n lignes et X une matrice colonne à n lignes, calculer à l'aide des coefficients de X et ceux de S la quantité : ${}^tXSX$.

c) Soit S une matrice symétrique telle que pour toute matrice colonne X on ait :

$$ {}^tXSX \geq 0$$

Montrer que toutes les valeurs propres de S sont positives. On pourra considérer une valeur propre et pour X un vecteur propre associé.

d) Montrer que la réciproque est vraie, on pourra diagonaliser S dans une base orthonormée.

e) En écrivant la somme suivante comme une somme de carrées montrer que :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ 6x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2yz \geq 0$$

En déduire que les valeurs propres de $S_2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ sont positives.

f) En vous inspirant de la méthode précédente montrer que les valeurs propres de la matrice $T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ sont positives.

Exercice 94 : Soit E un espace euclidien, S sa sphère unité, $S = \{\overrightarrow{u} \in E / \|\overrightarrow{u}\| = 1\}$ et $f : E \to E$ un endomorphisme symétrique. Pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in S$, on peut décomposer $f(\overrightarrow{u})$ sur vect$(\overrightarrow{u})$ et $\overrightarrow{u}^{\perp}$, on note $g(\overrightarrow{u})$ le projeté orthogonal de $f(\overrightarrow{u})$ sur vect$(\overrightarrow{u})$, et $h(\overrightarrow{u})$ le projeté orthogonal de $f(\overrightarrow{u})$ sur $\overrightarrow{u}^{\perp}$. On note $|||h||| = \max\{\|h(\overrightarrow{u})\| \in \mathbb{R} / \overrightarrow{u} \in E\}$.

a) Que vaut $h(\overrightarrow{v})$ lorsque $\overrightarrow{v}$ est un vecteur propre de f.

b) Montrer que $h(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{u}) - (f(\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{u}$.

c) Montrer que $\|h(\overrightarrow{u})\|^2 = \|f(\overrightarrow{u})\|^2 - (f(\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{u})^2$.

d) Soit $(\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de f tq $f(\overrightarrow{e}_i) = \lambda_i \overrightarrow{e}_i$, montrer que pour tout élément de S : $\Sigma\ u_i \overrightarrow{e}_i$

$$\left\| h\left(\sum_{i=1}^{n} u_i \overrightarrow{e}_i \right) \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 u_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i^2 \right)^2$$

e) Dans cette question on suppose que $n = 2$, montrer que $|||h||| = \frac{1}{2}|\lambda_1 - \lambda_2|$.

f) Dans cette question on suppose que f est une projection orthogonale, montrer que $|||h||| = \frac{1}{2}$.

g) Dans le cas général, montrer que $|||h||| \geqslant \frac{1}{2}\big(\max(\lambda_i) - \min(\lambda_i)\big)$.

sol : $h(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$
le projeté orthogonal de $f(\overrightarrow{u})$ sur $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$ est $(f((\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{u})$
$f(\overrightarrow{u}) = \sum u_i \overrightarrow{e}_i$, $(f(\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{u}) = \sum \lambda_i u_i^2$.

Pour $n = 2$, on a $\|h\|^2 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 u_1^2 u_2^2$, or $u_1 u_2$ est maximum pour $u_1 = 1/\sqrt{2}$. Pour une projection $\lambda = 0$ ou 1

Exercice 95 : Représentation plane de Mohr d'une matrice symétrique.

Soit M la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ avec $\det(M) \neq 0$ et $a > c$. On note $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(a; b)$ et $B(c; -b)$. On note λ_1, λ_2 les deux valeurs propres de M avec $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$.

a) Écrire λ_1 en fonction de a, b et c, puis les coordinnées d'un vecteur propre $\overrightarrow{u}$ associé à λ_1.

b) Écrire $\tan(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u})$ en fonction de a, b et c.

c) Déterminer l'équation du cercle $\mathcal{C}$.

d) Montrer que les deux points d'intersections de $\mathcal{C}$ et de l'axe (Ox) ont pour abscisse les valeurs propres de M. On note L_1 celui qui a la plus grande abscisse et L_2 l'autre.

e) Montrer que $\tan(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}) = \tan(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{L_2 A})$, interprétation pour trouver graphiquement l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u})$.

Solutions des exercices corrigés

Solution de l'exercice 1 : $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AG_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AG_3} = -\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AG_4} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AG_5} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AG_6} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$;

Solution de l'exercice 15 $\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v_1} \neq 0$ donc base non orthogonale. $\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$ donc base orthogonale, $\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_2} \neq 1$ donc pas orthonormale. $\overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{v_3} = 0$ donc base orthogonale, $\overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{u_3} = 1$ et $\overrightarrow{v_3} \cdot \overrightarrow{v_3} = 1$ donc base orthonormale. $\overrightarrow{u_4} \cdot \overrightarrow{v_4} = 0$ et $\overrightarrow{u_4} \cdot \overrightarrow{w_4} = 0$ et $\overrightarrow{v_4} \cdot \overrightarrow{w_4} = 0$ donc base orthogonale, $\overrightarrow{u_4} \cdot \overrightarrow{u_4} \neq 1$ donc base non orthonormale. $\overrightarrow{v_5} \cdot \overrightarrow{w_5} \neq 0$ donc base non orthogonale.

Solution de l'exercice 24 : $\overrightarrow{e}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\overrightarrow{e}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, $\overrightarrow{e}_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$

Solution de l'exercice 34 : $AE = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$ $AB = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$ $CA = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 3 & -8 & -4 \end{pmatrix}$ $CF = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ $FC = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ $D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, AC, A^{-1}, G^{-1} n'ont pas de sens.

Solution de l'exercice 35 : $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -27 & 1 & 32 \\ 4 & 0 & -5 \\ 28 & -1 & -33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3/2 & 7/2 \end{bmatrix}$

Solution de l'exercice 68 :

Étape 1 : Calcul du polynôme caractéristique

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

On a :

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -8 & 6 \\ -1 & -8-\lambda & 7 \\ 1 & -14 & 11-\lambda \end{pmatrix}$$

Calculons le déterminant par développement selon la première ligne :

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda \cdot \begin{vmatrix} -8-\lambda & 7 \\ -14 & 11-\lambda \end{vmatrix} + 8 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 1 & 11-\lambda \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -8-\lambda \\ 1 & -14 \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda - 12$$

Étape 2 : Résolution de l'équation caractéristique On cherche les racines du polynôme :

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12$$

On remarque que 2 est racine On factorise :

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12 = (\lambda - 2)(\lambda^2 - \lambda - 6)$$

Puis :

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda - 3)(\lambda + 2)$$

Les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -2$$

Il y a 3 valeurs propres distinctes, la matrice est diagonalisable, et pour obtenir une base de vecteurs propres il suffit de choisir un vecteur propre associé à chacune des valeurs propres.

Étape 3 : Calcul des vecteurs propres

Pour $\lambda = 2$, On résout $(A - 2I)\overrightarrow{v} = 0$: $A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 6 \\ -1 & -10 & 7 \\ 1 & -14 & 9 \end{pmatrix}$ $E_2 = \ker(A - 2I) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Pour $\lambda = 3$, On résout $(A - 3I)\overrightarrow{v} = 0$: $A - 3I = \begin{pmatrix} -3 & -8 & 6 \\ -1 & -11 & 7 \\ 1 & -14 & 8 \end{pmatrix}$ $E_3 = \ker(A - 3I) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Pour $\lambda = -2$, on résout $(A+2I)\overrightarrow{v} = 0$: $\quad A+2I = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 6 \\ -1 & -6 & 7 \\ 1 & -14 & 13 \end{pmatrix}$ $\quad E_{-2} = \ker(A+2I) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Étape 4 : Matrices de passage et diagonale On fait bien attention à garder le même ordre pour les valeurs propres et les vecteurs propres. On pose

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Conclusion La matrice A est la matrice d'une application linéaire f dans la base canonique, D est la matrice de f dans la base de vecteurs propres $(\overrightarrow{u_n}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_{-2}})$, P est la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres, on a donc la relation :

$$A = PDP^{-1}$$